Подсказки к задачам

1. Найдите два негомеоморфных компактных подмножества X_1, X_2 плоскости, таких что $X_1 \times I$ гомеоморфно $X_2 \times I$, где $I = [0, 1]$, замкнутый отрезок прямой.

Пример: X_1 – кольцо ($\{z \in \mathbb{C} | 1 \le |z| \le 2\}$) с двумя волосками (отрезками) наружу с внешней окружности. X_2 – такое же кольцо на плоскости с двумя волосками по-другому, один волосок наружу с внешней окружности, второй вовнутрь с внутренней окружности.

2. Четырёхточечное множество наделили минимальной (по количеству открытых подмножеств) топологией, в которой две точки открыты (каждая из них является открытым множеством), а остальные две – замкнуты. Вычислите фундаментальную группу этого пространства и постройте его универсальное накрытие.

Подсказка: надо заметить что это четырёхточечное множество по смыслу является окружностью (есть разбиение окружности на четыре клетки: две точки и два интервала). Фундаментальная группа, тем самым, $\mathbb{Z}$. Универсальным накрытием окружности является прямая, а у нас получится $\mathbb{Z}$, с топологией “цифровой прямой” (прямая Халимского).

3. а) В пространстве всех треугольников на плоскости является ли деформационным ретрактом подпространство всех прямоугольных треугольников? б) Построить деформационную ретракцию пространства всех треугольников плоскости на подпространство правильных треугольников.

Ответ: а) нет. У прямоугольных треугольников есть выделенная вершина. Поэтому если есть такая ретракция, то у каждого треугольника можно каким-то образом однозначно выбрать вершину (которая пойдёт в прямой угол). Но рассмотрим правильный треугольник. В пространстве всех треугольников есть петля, которая представляет поворот на $2\pi/3$ при котором правильный треугольник переходит в себя. Даже для этой только петли нет ретракции.

б) воспользуйтесь треугольником Наполеона.

4. Пусть X – связное многообразие и $f : X \to S^2$ непрерывное отображение, такое что $f^{-1}(x)$ гомеоморфно S^1 для всех точек x сферы S^2. Чему может равняться $H_1(X, \mathbb{Z}), H_2(X, \mathbb{Z})$?

Если f – расслоение, можно написать спектральную последовательность. Или можно думать, что S^2 склеено из двух дисков D_1, D_2 по их общей окружности $\partial D_1 = \partial D_2$. Значит расслоения получаются как склейка $D_1 \times S^1, D_2 \times S^1$, таких разных склеек как отображений ∂D_1 в слой (который S^1), итого $\pi_1(S_1) = \mathbb{Z}$. Гомологии посчитать просто при такой явной конструкции.

Но f не обязательно расслоение! бывают слоения Зейферта.

5. Рассмотрим $S^4 = \{x \in \mathbb{R}^5 \big| |x| = 1\}$. Можно ли в каждой точке $x \in S^4$ выбрать двумерную аффинную плоскость P_x, касающуюся S^4 в x, так что P_x непрерывно зависит от x?

Нет. Пусть такое подрасслоение есть. Тогда его класс Эйлера нулевой ($H_2(S^4) = 0$). Значит, и класс Эйлера суммы слоения и ему ортогонального равен нулю, а это не так: класс Эйлера касательного расслоения к S^4 равен 2.

6. Может ли хаусдорфово пространство со счётным количеством точек быть связным?

Да, есть множество примеров. Ищите в интернете (по английски).

7. Существует ли сюръективное непрерывное отображение $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, которое не является гомеоморфизмом, но такое что у каждой точки $x \in \mathbb{R}^2$ существует окрестность U такая, что $f : U \to f(U)$ это гомеоморфизм?

Да. $\mathbb{R}^2$ гомеоморфно длинному прямоугольнику без границы и кругу без границы (радиуса чуть больше чем меньшая сторона прямоугольника). Уложим прямоугольник следующим образом: когда он первый раз проходит по кругу, он накрывает всё кроме маленькой окрестности центра (похоже на отображение $z \to e^z$ на комплексной плоскости), а при проходе второй раз мы конец прямоугольника уложим сверху на центр круга.

8. а) Рассмотрим квадрат $[0, n]^2$ на плоскости, n — натуральное. Удалим из квадрата все точки, у которых обе координаты нецелые. Остался одномерный клеточный комплекс, назовём его X. Найдите максимальное $k = k(n)$ такое, что для любого непрерывного отображения X в $\mathbb{R}^1$ найдётся точка с хотя бы k прообразами. б) То же самое для отображений в $\mathbb{R}^2$ двумерного комплекса, полученного из $[0, n]^3 \subset \mathbb{R}^3$ выбрасыванием всех точек, у которых все координаты нецелые.

а) можно посмотреть на образы вершин. Если они все различные, то рассмотрим прообраз точки, у которой примерно поровну образов вершин справа и слева. б) я умею получать неоптимальную оценку (типа $n/10$) с помощью http://www.ihes.fr/~gromov/PDF/morse2_gafa.pdf

9. Существует ли иммерсия сферы $f : S^2 \to \mathbb{R}^3$, такая что не существует иммерсии $g : D^3 \to \mathbb{R}^3$ трёхмерного диска, для которой $g|_{\partial D^3} = f$?

Конечно. Давайте сначала посмотрим на плоскость – вложим окружность восьмёркой. Понятно, что это не продолжить иммерсией диска. Такую же “восьмёрку” сделаем в пространстве: рассмотрим стандартную сферу, вдавим верхнюю её часть, чтобы она оказалась ниже нижней. Нам надо всего лишь, чтобы образ вложения сферы делил пространство на части. Теперь посмотрим на возможную иммерсию D^3 без границы. Заметим, что это открытое связное множество. Значит, его граница не может быть трёхмерной “восьмёркой”.