Две культуры в математике.

У.Т. Гауэрс[1]

В 1959 году, в своей знаменитой лекции[2] „Две культуры" Ч.П.Сноу диагностировал отсутствие понимания между учёными гуманитарных и естественных наук[3], и приводил различные аргументы в пользу того, что это важная проблема современного общества. Он обвинял гуманитариев в их нежелании даже пытаться понять происходящее в естественных науках. Кроме того, ситуация несимметрична (и продолжает таковой оставаться сейчас, хотя и в более мягких формах), и этому посвящён один из самых запоминающихся[4] пассажей в книге:

„Много раз я был на встречах, где собирались, по привычным меркам, высококультурные люди[5], которые, не скрывая чувства превосходства, обсуждали необразованность учёных-естественников, технарей[6]. Несколько раз, будучи раздражён этим, я спрашивал, многие ли из них готовы сходу сформулировать второй закон термодинамики[7]. Ответом всегда было холодное молчание! Никто не мог ответить. Но ведь я задавал вопрос, аналогом которого было бы «Читали ли Вы Шекспира?». "

Я хочу показать, что похожий социальный феномен наблюдается и в математике, и что это не вполне здоровая ситуация.

Две культуры, о которых я буду говорить, знакомы всем профессиональным математикам. Грубо говоря, есть математики, которые видят своё назначение в решении конкретных проблем, а есть те, кто занимается построением и развитием теорий.

Это деление было замечено многими, я лишь соглашаюсь. Как любое обобщение, это деление упрощает ситуацию, но не настолько, чтобы быть бессмысленным. Если Вы не знаете, к какому классу принадлежите, посмотрите на два высказывания :

1) Решение конкретных проблем помогает понять математику лучше.
2) Понимание математики в целом помогает решать конкретные задачи[8].

Все математики скажут, что правильно и то, и другое. Не все вопросы одинаково интересны, и единственный способ оценить важность вопроса — это продемонстрировать, что ответ на него проясняет наше понимание математики в целом. Вместе с тем, если кто-то тратит годы, в напряжении осваивая сложные области математики, но это понимание не приводит ни к каким новым результатам[9], то кому интересно, чем он занимается? Конечно, с последними двумя утверждениями многие математики не согласятся. Например, сэр Майкл Атия, в своём интервью ([A1],1984):

Минио: Как Вы выбираете задачи, которые Вы решаете?

Атия: Я попробую объяснить. Я вообще не думаю о пути, по которому я движусь. Некоторые садятся в задумчивости и говорят „Я хочу решить такую-то проблему" , потом берутся за неё и думают „Как мне её решить?". У меня не так. Я просто плаваю в математических морях, думаю, удивляюсь, интересуюсь, общаюсь, впечатляюсь идеями, следую возникающим мыслям. Или я замечаю сходства, возникают ассоциации и связи между различными вещами, которые я знаю, и я пытаюсь развить их и выявить глубинное сходство. Я

[1] *Это перевод статьи по случаю аспирантского экзамена по английскому. Перевод местами довольно далёк от оригинала, но я старался передать суть как можно яснее - и мне кажется, не всегда это уводило от истины, иногда даже напротив. Спасибо всем тем, кто принимал участие в редактировании.*

Никита Калинин.

Оригинал статьи доступен на: `http://www.dpmms.cam.ac.uk/~wtg10/2cultures.pdf`

[2] „Rede lecture", 1959.

[3] Имеются в виду *humanities* и *sciences*. И если для представителей первого в русском языке имеется хоть какой-то аналог (гуманитарии), то со вторым сложнее (естественники?). Математика, кстати, у них не относится ни к тем, ни к тем. Что интересно, есть ещё книга Джерома Кэйгана „Три культуры" (Jerome Kagan's „The Three Cultures"), в которой обсуждаются проблемы взаимодействия естественных наук, гуманитарных наук и наук об обществе.

[4] и самых цитируемых.

[5] По этому поводу Ч.П.Сноу пишет: Мне кажется, что духовный мир западной интеллигенции все явственнее поляризуется, все явственнее раскалывается на две противоположные части. Говоря о духовном мире, я в значительной мере включаю в него и нашу практическую деятельность, так как отношусь к тем, кто убеждён, что, по существу, эти стороны жизни нераздельны. А сейчас о двух противоположных частях. На одном полюсе - художественная интеллигенция, которая случайно, пользуясь тем, что никто этого вовремя не заметил, стала называть себя просто интеллигенцией, как будто никакой другой интеллигенции вообще не существует. Вспоминаю, как однажды в тридцатые годы Харди с удивлением сказал мне: „Вы заметили, как теперь стали употреблять слова «интеллигентные люди»? Их значение так изменилось, что Резерфорд, Эддингтон, Дирак, Адриан [Э. Резерфорд (1871-1937) и П.А. Дирак (род. В 1902 г.) — английские физики; А.С. Эддингтон (1882-1944) — английский астрофизик; Э.Д. Адриан (род. в 1889 г.) — физиолог.] и я — все мы уже, кажется, не подходим под это новое определение! Мне это представляется довольно странным, а вам?".

[6] Технари (инженеры, программисты, etc) - в оригинале статьи их нет, но современные реалии, кажется, оправдывают эту вставку.

[7] Второй закон термодинамики: Энтропия изолированной системы не может уменьшаться.

[8] Английское слово *problem* на русский я перевожу как задача, вопрос, гипотеза, проблема в зависимости от того, что мне кажется более уместным. Говоря про проблемы, обычно имеют в виду направления, в которых вообще не понятно, что делать. Задачи - это не обязательно учебные задачи, зачастую это слово показывает меньшую общемировую значимость, и большую личную вовлечённость. Теоремами и леммами обычно называют уже доказанные утверждения.

[9] Известный критерий осмысленности: новая теория хороша, если с её помощью можно доказать утверждение, которое формулируется, не используя язык этой теории, но иным образом его доказать не получается.

практически никогда не начинал с определившимися намерениями, чего я хочу или как я собираюсь это сделать. Я просто интересуюсь математикой. Рассказываю, изучаю, обсуждаю и интересные вопросы просто сами возникают. Я никогда не начинаю с конкретной цели, кроме желания понять математику.

Это интервью было опубликовано в The Mathematical Intelligencer и потом переиздано в собрании сочинений Атии. Всем, кто хочет упорядочить свои представления о важности вопросов в математике, я настоятельно советую прочитать эссе и лекции Атии на эту тему. Я буду к ним обращаться в этой статье ещё не раз.

Другой человек, который бы не относился к этим двум тезисам одинаково, был Поль Эрдёш, который подарил миру огромное количество восхитительных задач, решений, но развитием теорий занимался сравнительно мало. Нет сомнений в том, что Эрдёш стремился понять математику; многие люди, которые решили задачи Эрдёша (увы! я не среди них) говорили, что в процессе всё более и более напряжённого размышления над задачей, они вдруг оказывались в неожиданных и плодоносных направлениях, и задача оказывалась более чем просто забавной, как это поначалу казалось.

Таким образом, когда я говорю, что математики бывают двух типов: а) (*конкретные*)[10] нацеленные на решение чётко поставленных задач, и б) (*системные*) предпочитающие разработку и осмысление новых концепций - я имею в виду их приоритеты; смешно предполагать, что для них жёстко задана область интересов и манера мышления.

Очевидно, математика нуждается и в тех, и в других (как Атия сам пишет в конце [A2]) Так же очевидно, что различные области математики требуют различных умений. В некоторых, таких, как алгебраическая теория чисел, или в том, что сейчас принято объединять под общим названием „геометрия", кажется (но тут я не специалист — и не вполне уверен в этом), что по многим причинам важно быть постоянно в курсе того, что делают математики в близких областях, так как новые результаты зачастую являются хитроумными комбинациями более ранних достижений. Поэтому опасно замыкаться на несколько лет над одной проблемой (относительно незнаменитой) в изоляции от общества, в итоге её решить, и узнать, что решение уже никому не нужно.

На другом конце спектра лежит, например, теория графов, где базовый объект — граф — может быть объяснён и понят за пять минут. Никто не занимается тем, что часами сидит на стуле и пытается понять „граф" лучше. Совершенно не обязательно читать много литературы перед тем, как приступить к решению конкретной задачи – важно знать некоторые базовые техники, но интересные проблемы остаются нерешёнными как раз потому, что эти техники к ним применить не удаётся.

А сейчас я скажу об асимметрии, подобной той, о которой так выразительно пишет Сноу. Это распространённое мнение: будто бы происходящее в областях, требующих больших трудов для понимания, интереснее и важнее, чем то, что появляется в областях, где формулировку теоремы можно объяснить школьнику. Более того, системные математики думают, что работают над ядром[11] математики (Атия нашёл превосходную метафору!), а комбинаторные вопросы находятся где-то на периферии и очень мало связаны с математикой в целом. Можно легко себе представить собрание высококультурных математиков, с усмешкой обсуждающих своих необразованных коллег из конкретных областей, которые ничего не знают про квантовые группы, зеркальную симметрию, многообразия Калаби-Яу, уравнения Янга-Миллса и их решения; даже что такое когомологии. Если конкретный математик захочет прервать этот поток понятий и просто спросит, как много подмножеств множества $\{1, ..., n\}$ можно выбрать так, чтобы мощность симметрической разности любых двух подмножеств была более $n/3$, реакция скорее всего окажется прохладной.

(Задача эта очень проста, в случае, если знать подходящую технику, которая состоит в том, чтобы выбрать множества случайно и показать, что вероятность того, что какая-то пара имеет симметричную разность менее, чем $n/3$, экспоненциально мала. Поэтому ответом является e^{cn} для некоторого c).

Главная цель этой статьи состоит в том, чтобы защитить комбинаторику (которую я хорошо знаю), от такого рода нападок.

Вместе с тем, говоримое относится к другим областям не в меньшей мере. Я часто использую слово „комбинаторика" в не совсем общепринятом смысле: комбинаторная задача — это задача, которая может быть поставлена и решена безо всяких дополнительных знаний[12]. (Это, скорее, их характер, нежели абсолютное и

[10]В оригинале *problem-solving* и *theory-building*. Пословный перевод выглядит ужасно, каждый раз писать причастные обороты мне не хочется, оставить без перевода я не могу. Кажется, «конкретные» и «системные» - это наилучший из возможных переводов. Он артикулирует то, что первые любят решать конкретные проблемы, а вторые ищут правильную систематизацию знаний. Я не удержусь здесь от предъявления своей точки зрения: конкретность и системность мало связаны с областью деятельности. Бывает системная комбинаторика - дальнейшие примеры этой статьи это показывают, и бывает конкретная алгебра (классификация простых групп). Т.е. ко всем результатам надо подходить с индивидуальной точки зрения, что, вроде бы, и так все понимают. Впрочем, жанр статьи - апологетика...

[11]*core* — 4) The core of something such as a problem or an issue is the part of it that has to be understood or accepted before the whole thing can be understood or dealt with.(CollinsCobuild). Я думаю, именно в этом смысле надо понимать словоупотребление „ядро математики". Метафора Атии добавляет при этом оттенки других смыслов этого слова: ядро — это самое вкусное, самое нужное и полезное, оно в центре, а остальное — на периферии..

[12]Что оправдывает перевод *problem-solving* как *конкретные* математики. В России развито олимпиадное движение, что добавляет перцу в котёл обсуждения вопросов о двух культурах: мол, бывает олимпиадная математика (например, теория графов), а бывает настоящая (например, алгебраическая геометрия). При этом иногда приводят смешные критерии — мол, условия и решения задач теории графов можно объяснить школьнику, а для понимания интересных (= не комбинаторных) проблем алгебраической геометрии

строгое определение). Такие проблемы не обязательно носят дискретный характер, или заключаются в подсчёте чего-либо. Тем не менее, видно большое перекрытие между описанным видом задач и комбинаторикой в её обычном понимании.

Почему *конкретные* области менее важны, чем *системные*? Или, более общо: почему одна область математики может быть важнее другой области? Атия написал ясно и убеждающе (с должным уважением к мыслям Пуанкаре и Вейлю по этому поводу, и в известной мере продолжая их). Он говорит (см., например [A2]), что математики производят огромный поток информации, который невозможно воспринять одному человеку. Процесс абстракции и обобщения, поэтому, становится важен как средство компрессии. Все результаты должны быть согласованно и экономично изложены для будущих поколений математиков. Конечно, решения некоторых важных проблем нужно запомнить, но если они не укладываются в некоторую разумную схему, то детальное изложение будет изучать только горстка специалистов.

Таким образом акцент смещается с интереса и пользы на коммуникацию (впрочем, очевидно, что если результат забудут, то от него ни пользы, ни интереса.) Комбинаторика же, как многим кажется, состоит из большого числа разнородных проблем, и не укладываются в этот проект. Каждая задача может требовать необычной гениальности, и гениальные люди есть, особенно в Венгрии, но будущие поколения смогут прочитать и восхититься лишь малой долей их результатов. Я попытаюсь возразить этой критике. Конечно, редки в комбинаторике общие утверждения, которые неожиданно помещают многие вопросы в общий контекст. И многие результаты изолированы друг от друга и могут быть абсолютно забыты (но это не отличает комбинаторики от других областей математики). Тем не менее, неверно, что в комбинаторике нет никакой структуры. Причина того, что многим математикам так кажется, в том, что, хотя комбинаторика и видится собранием задач и результатов, организующие принципы есть, но менее видны. Но, если абстрагирование и обобщение, которые так важны для математиков, так плохо применимы в комбинаторике, то как её передавать следующим поколениям? Один из способов пытаться ответить на этом вопрос — это подумать, что будет нужно комбинаторике завтра. Как я уже сказал, приоритет *конкретных* математиков в решении задач, поэтому их интерес к уже решённым задачам состоит в нахождении того, что поможет им лучше решать другие задачи. И это направляет нас прямо в суть проблемы. Важные идеи в комбинаторике обычно появляются не в форме точно сформулированных теорем, но, чаще, в виде общих, широкоприменимых принципов. Я приведу пример — одну из формулировок теоремы Рамсея .

Теорема. *Для любого натурального k найдётся натуральное N такое, что в полном графе на N вершинах, рёбра которого покрашены в два цвета, найдутся k вершин, такие, что все рёбра между ними одного цвета. Наименьшее такое N обозначается $R(k)$. Покажем, что $2^{k/2} \leq R(k) \leq 2^{2k}$.*

Пусть G – граф с 2^{2k} вершинами. Пронумеруем вершины каким-то образом. Пусть x_1 - первая вершина. Тогда по принципу Дирихле x_1 соединена рёбрами одного цвета хотя бы с 2^{2k-1} вершинами, множество этих вершин обозначим A_1. Пусть x_2 – вершина с наименьшим номером из A_1. Аналогичным образом выберем $A_2 \subset A_1$, его размер хотя бы 2^{2k-2}, все рёбра из x_2 в A_2 имеют один и тот же цвет. Продолжая процесс, мы получим последовательности вершин $x_1, x_2, \ldots, x_{2n}$ и множеств $A_{2k} \subset \ldots \subset A_2 \subset A_1, x_i \in A_{i-1}$ и рёбра из x_i в A_i имеют одинаковый цвет. Значит, цвет ребра между i и j зависит только от $min(i,j)$. По принципу Дирихле есть подмножество $H \subset x_1, \ldots x_{2k}$ размера не менее k такое, что цвет между вершинами соответствующих компонент всегда постоянен, значит, все рёбра в H одного цвета.

Легко улучшить оценку до C_{2k}^k, пользуясь теми же идеями. Тем не менее, мне сейчас важнее продемонстрировать нижнюю оценку для $R(k)$. Один из самых знаменитых результатов Эрдёша состоит в том, что $R(k) \geq 2^{k/2}$ и доказательство следующее. Вместо того, чтобы строить покраску явно, мы будем красить рёбра случайным образом. Пусть каждое ребро красное с вероятностью 1/2 и синее с той же вероятностью, и все эти события независимы. Пусть вершин N и $x_1, \ldots, x_k$ – какие-то k из них. Вероятность того, что каждое x_i соединено с x_j ребром красного цвета равна $2^{-C_k^2}$ и то же для всех синего цвета. Значит, матожидание количества k-элементных подмножеств, все рёбра которых одноцветны равно $2^{1-C_k^2} C_N^k$. Если оно меньше 1(а лёгкие вычисления показывают, что оно меньше, когда $N = 2^{k/2}$), значит, возможно, чтобы не было такого k-элементного множества.

Этот результат Эрдёша [E] известен не потому, что у него много приложений, не потому, что он сложен, не потому, что это веками стоявшая проблема. Его важность состоит в том, что этот факт открыл плотину, и в комбинаторику хлынули вероятностные аргументы. Если Вы поняли простую идею Эрдёша (или любой другой такой результат), тогда Вы заполучили в свой арсенал следующий общий принцип:

Если надо максимизировать размер некоторой структуры при некоторых условиях, и ожидается, что пример должен быть в некотором смысле однороден, тогда случайным образом его выбирая, мы можем добиться хороших результатов.

Как только вы усвоили этот принцип, ваша математическая сила немедленно возрастает. Вопросы навроде того, что я привёл в начале, о нахождении большого числа множеств с большой симметрической разностью

надо учиться несколько лет. Надо ли говорить, что такую точку зрения можно объяснить компенсирующими механизмами психики — человек потратил несколько лет на нечто, и сейчас почти никто не понимает, чем он занимается. Это как с современной поэзией и литературой, читает её мало кто, а авторы жалуются на бездуховность и необразованность, ставя себе в образец великих, которых тоже никто не понимал... Вместе с тем это не означает, что они неправы.

между любыми двумя из них, внезапно из кажущихся крайне сложными превращаются в тривиальные. Конечно, есть много вероятностной комбинаторики, которая не так проста, как эти примеры. Например, часто не так просто оценить искомые вероятности. Тем не менее, много сделано в этой области, и много сложных техник разработано. Некоторые из них могут быть изложены в виде полезных принципов. Вот один из этих принципов, известный как *концентрация меры*:

Если функция f зависит от большого числа маленьких переменных, тогда $f(x)$ почти всегда близко к среднему значению.

Важность этого принципа была впервые продемонстрирована Виталием Мильманом в его революционном доказательстве [M] теоремы Дворецкого [D].

Теорема. *Для любого натурального k и любого $\varepsilon > 0$ существует такое n, что каждое n-мерное нормированное пространство x имеет k-мерное подпространство с расстоянием Банаха-Мазура от l_2^k не более $1+\varepsilon$.*

Т.е., эквивалентно, мы хотим найти векторы $x_1, x_2, \dots, x_n \in X$ такие, что

$$(\sum a_i^2)^{1/2} \leq ||\sum a_i x_i|| \leq (1+\varepsilon)(\sum a_i^2)^{1/2}$$

для любого набора скаляров $a_1, \dots a_n$. Более геометрическая (и абсолютно контринтуитивная формулировка) утверждает, что каждое n-мерное выпуклое центрально-симметричное тело имеет k-мерное центральное сечение, которое почти эллипсоидально, т.е. содержит эллипсоид B и содержится в эллипсоиде $(1+\varepsilon)B$. Подход Мильмана состоял в том, чтобы выбирать k-мерное сечение случайным образом. Перед этим должно выбрать подходящую меру, которая может быть получена с помощью теоремы Фрица Джона, утверждающей, что существует базис $x_1, \dots x_n \in X$, который достаточно близок к ортонормированному, т.е.

$$(\sum a_i^2)^{1/2} \leq ||\sum a_i x_i|| \leq \sqrt{n}(\sum a_i^2)^{1/2}$$

для любого набора $a_1, \dots a_n$. Затем следует взять естественную меру на грассманиане $G(n,k)$ относительно этого базиса (более точные утверждения нас здесь не интересуют).

В случае предыдущих результатов, мною упомянутых, можно было догадаться, что вероятностный метод должен помочь, чего никак нельзя было ожидать в этом примере. Естественно думать, что типичное сечение выпуклого нерегулярного тела нерегулярно. Тем не менее, любой кто знаком с идеей концентрации меры, заметит, что норма $\sum a_i x_i$ зависит от a_i. Далее, так как мы интересуемся отношением нормы к l_2 норме $(\sum a_i^2)^{1/2}$, можно считать, что все a_i мало отличаются друг от друга. Тогда, опираясь на метаидею[13] концентрации меры, мы можем ожидать, что отношение X-нормы к l_2 норме близко к матожиданию почти всегда. А тогда формулировка про почти эллиптическое сечение перестаёт казаться неожиданной.

Главный результат, о котором нужно упомянуть для уточнения приведённых выше аргументов состоит в следующем следствии изопериметрического неравенства Леви на сфере. Пусть $f\colon S^n \to \mathbb{R}$ функция с медианой[14] M. Пусть $A \subset S^n$ множество точек x таких, что $f(x) \leq M$. Тогда вероятность того, что случайная точка в S_n имеет расстояние до A, больше ε, не более $\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-\frac{\varepsilon n^2}{2}}$. Замена f на $-f$ показывает, что почти любое y близко к $\{x|f(x) \geq M\}$. Теперь возьмём $f(a_1, a_2, \dots, a_n) \leq ||\sum a_i x_i||$. Так как f необходимым образом непрерывна, большинство точек близко к $x \in A$, это влечёт, что $f(y)$ не сильно больше M. Аналогично, $f(y)$ не сильно меньше M для почти всех y. Теорема Дворецкого, особенно в доказательстве Мильмана, это важный этап локальной (т.е. конечномерной) теории банаховых пространств. Мне очень жаль, что не все смогут увидеть внутреннюю привлекательность этой теоремы, но эта привлекательность всё равно не объясняет грандиозных последствий, которые это доказательство, безотносительно банаховых пространств, имела в виде внедрения идеи концентрации меры в инструментарий многих математиков. Опубликовано огромное количество статей, использующих эту метаидею или предлагающих новые подходы к её доказательству.

Я могу привести много таких принципов[15], здесь лишь малая доля. Они все разной важности, как я сказал, не точны, но выражают существо дела:

1) Очевидно, если события $E_1, E_2, \dots, E_n$ независимы в совокупности и имеют ненулевую вероятность, тогда с ненулевой вероятностью вероятностью случаются они все. Это верно и для не слишком зависимых событий[EL, J].

2) Все графы сделаны из маленьких, почти случайных кусочков, и мы знаем, как устроены эти кусочки[Sze].

3) Для подсчёта числа решений линейного уравнения внутри данного множества, полезнее, а иногда и проще оценить коэффициенты Фурье характеристической функции множества[16].

[13]Вот эти организующие принципы я называю далее *метаидеями*..

[14]Медианой для данного распределения называется такое число m, что $P(\xi \leq m) = 1/2$.

[15]Кажется, что математика в целом устроена как коллекция метаидей, а не конкретных формулировок. Впрочем, мой вопрос на mathoverflow об этом успеха не имел - `http://mathoverflow.net/questions/48692/organizing-principles-of-mathematics` .

[16]Например, сведём вопрос о числе решений уравнения $a - 2b + c = 0$ (т.е. числе арифметических прогрессий длины 3) в некотором подмножестве $A \subset \mathbb{F}_p$ к коэффициентам Фурье характеристической функции χ_A множества A (Имеется в виду резуль-

4) Многие свойства свойства случайных графов эквивалентны и могут быть взяты за определение псевдослучайных графов[CGW, T].

5) Иногда множество последовательностей из нулей и единиц является отличной моделью для сепарабельных банаховых пространств или позволяет формулировать интересные гипотезы.

Мой главный тезис не в том, что эти утверждения полезны (с этим все согласны), а в том, что они играют организующую роль в комбинаторике, как глубокие теоремы широкой общности в более теоретических разделах. Для понимания результата, гораздо быстрее разъять его на пару-тройку главных идей. А знакомство с общими принципами и некоторыми примерами позволяет не интересоваться мелкими деталями рассуждений. Например, доказательство Эрдёша для нижней оценки $R(k)$ я запомнил так: выбрать раскраску случайно и сделать очевидные вычисления. Другой пример — следующая значительная теорема Кашина[K].

Теорема. *Для каждого натурального n существует ортогональная декомпозиция $\mathbb{R}^{2n}$ (относительно обычного внутреннего произведения) в два n-мерных подпространства X, Y такое, что для $x \in X \cup Y$ отношение l_1-нормы к l_2-норме x лежит между $c\sqrt{2n}$ и $\sqrt{2n}$ для некоторого $c > 0$.*

Доказательство Шарека[Sza] этой гипотезы выглядит так(если вы знаете сопутствующие метапринципы): простой подсчёт объёмов показывает, что почти никакой единичный шар в l_1^n не содержится в угловой части (т.е. там, где отношение l_1-нормы к l_2-норме мало), после этого легко показать, что случайная декомпозиция подходит. Третий пример — это следующая теорема Рота[R].

Теорема. *Для каждого $\delta > 0$ существует N такое, что каждое подмножество $\{1, 2, \ldots, N\}$ размера не меньше δN содержит арифметическую прогрессию длины 3.*

В сжатой форме доказательсто следующее. Рассмотрим подмножество $A \subset \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ и изучим коэффициенты Фурье характеристической функции множества A. Если они маленькие (далеко от $\hat{A}(0)$) тогда A в сущности случайно, а тогда содержит много прогрессий длины 3. Иначе, большие коэффициенты позволяют взять подпрогрессию $\{1, 2, \ldots N\}$, в которой A имеет большую мощность.

Подытожу то, о чём я говорил так долго. Я попытался опровергнуть представление о том, что комбинаторика не имеет структуры и просто состоит из большого числа несвязанных проблем. Её структура просто менее явна, чем во многих других областях, и может быть описана в форме метапринципов, позволяющих компоновать в голове доказательства, проще их запоминать и понятнее рассказывать.

Есть и другие критические замечания по поводу комбинаторики. Например, я слышал, что в ней нет направлений или глобальных целей. Или что она недостаточно глубока. Нет интересных связей с другими областями математики (с ядром математики). Что её результаты не имеют приложений. Все эти нападки могут быть отражены. Посмотрим на утверждение о том, что в комбинаторике нет глобальных целей. Я снова процитирую Атию[A1].

„Я много думал о современной тенденции - люди разрабатывают целые разделы математики для себя, часто весьма абстрактные[17].

Они упорно трудятся где-то там над чем-то там. Но если их спросить, для чего это, что в этом интересного, есть ли важные связи с другими вопросами, они обычно не могут ответить."

Атия, конечно, пишет не только и не столько о комбинаторике, но он отмечает принципиальный момент - и работающему в комбинаторике, как никому другому, нужно показывать другим, что он делает нечто большее, нежели просто упорно размышляет.

Некоторые области математики по сути определяются небольшим кругом вопросов, относящихся к знанию в целом. Т.е. результат ставится значимым, если он проливает свет на гипотезу Римана, гипотезу Бёрча-Свиннертона-Дайера, гипотезу геометризации Тёрстона, гипотезу Новикова и что-нибудь другое в этом роде[18]. Другие области математики имеют причинами и источниками вопросов многочисленные неожиданные явления, требующие объяснения: какие-нибудь удивительные численные совпадения возникающие в разных сюжетах, идеи, скрывающиеся за доказательствами, похожими на полный перебор случаев, доказательства, которые, кажется, основываются на удачных совпадениях или принципы, которые часто помогают, но которые трудно сформулировать строго.

Сложно найти в комбинаторике большие центральные проблемы, подобные упомянутым выше (ну разве что $P = NP$). Тем не менее, важность результата в комбинаторике иногда не в самом результате, но в том, чему учит нас его доказательство, поэтому главные цели комбинаторики не всегда явно формулируются. Это показывает

тат дискретного преобразования Фурье. Множеству A сопоставим многочлен $\chi_A(x) = \sum_{a \in A} x^a$. Искомые коэффициенты равны $x_k = \chi_A(\zeta^k)$, где ζ — корень p-ой степени из 1). Число решений этого уравнения равно коэффициенту при x^0 в многочлене $(\sum_{a \in A} x^a)(\sum_{b \in A} x^{-2b})(\sum_{c \in A} x^c)$. Связь с коэффициентами Фурье состоит в том, что для любого многочлена f по модулю p верно равенство $f(0) = \frac{\sum_{k=0..p-1} f(\zeta^k)}{p}$.

[17] Слово „абстрактный" смешивает в себе два значения. Первое происходит от глагола „абстрагировать", что значит, выделять важные общие закономерности, и в математическом жаргоне доминирует именно это значение; а второе проявляется в словосочетании „абстрактные рассуждения". Т.е абстрактный - это оторванный от жизни, от реальных приложений и проблем, абстракции на пустом месте или там, где они неуместны. Здесь - второе значение.

[18] Формулировки можно найти на `http://www.claymath.org/millennium/`.

разобранное выше нижние оценки в теореме Рамсея. Несмотря на простоту подхода, который я привёл, он даёт почти наилучшие известные ныне оценки. Чтобы быть точным:

Открытая проблема. *Существует ли константа $a > \sqrt{2}$, такая, что $R(k) \geq a^k$ для достаточно больших k Существует ли константа $b < 4$, такая что $R(k) \leq b^k$ для всех достаточно больших k?*

Я считаю, что это одна из главных открытых проблем комбинаторики и я посвятил ей много месяцев жизни, безуспешно пытаясь её решить. Я пишу это с некоторым смущением - ведь многие математики считают этот вопрос головоломкой, а не серьёзной задачей.

Причина, по которой я так долго думал о нём, в том, что я, как и многие другие, кто пытался подступаться к этой проблеме, понимал, что она, скорее всего, не может быть решена методами, относящимися только к ней самой (Я имею в виду рассмотрение верхней оценки для $R(k)$.) Как видно, доказательство того, что $R(k) \geq 4^k$ требует только локальных рассмотрений - мы интересуемся только ближайшими соседями вершин. Лучшая оценка должна учитывать глобальные характеристики графа, и сейчас попросту нет инструментов для этого. Тем самым, продвижения в этой задаче помогут понять глобальные структуры графов и введут новые важные техники.

Ещё одно раздражающее обстоятельство заключается в том, что, попытавшись видоизменить рассуждения с вероятностями (для доказательства нижней оценки, лучшей, чем $2^{n/2}$), например, разбив вершины на пять классов и задав различные вероятности появления красных рёбер, зависящие от классов концов рёбер, мы наталкиваемся на огромное количество случаев - которые друг от друга принципиально не отличаются, но их разбор невозможно систематизировать. Я ожидаю, что такое разбиение на случаи влечёт улучшение верхней оценки, т.е. что есть некоторая классификация красно-синих раскрасок, применение к которой упомянутой непосредственно выше идеи позволяет улучшить оценку до 3.99^k.

Идея классификации графов выглядит поначалу странной, но я сейчас покажу метод, который уже стал привычным. Во-первых, мы определим псевдослучайные графы. Пусть G — граф, а A, B — непересекающиеся наборы вершин G. Пара (A, B) называется ε-однородной, если существует вещественное $\alpha > 0$ такое, что для любых $A' \subset A, B \subset B'$ мощности не менее $\varepsilon|A|$ и $\varepsilon|B|$ соответственно, число рёбер между A' и B' отличается от $\alpha|A'||B'|$ не более чем на $\varepsilon|A'||B'|$. Если ε мало, то получается, что двудольный граф, состоящий из рёбер G между A и B похож на граф, где каждое ребро появляется с вероятностью α. Следующий результат получен Семереди[Sze] и известен как *униформизационная лемма* (или лемма о регулярности).

Теорема. *Пусть G — граф, $\varepsilon > 0$ и k - натуральное. Тогда существует константа K, зависящая только от k и ε, такая, что вершины G могут быть разделены между множествами $A_1, A_2, \dots A_m$, где $k \leq m \leq K$ так, что не менее чем $(1-\varepsilon)C_m^2$ из пар $(A_i, A_j), i < j$ являются ε-однородными.*

Это, как заметил внимательный читатель, в точности формулировка принципа 2, упомянутого ранее (к сожалению, не все такого рода принципы могут быть выражены строго).

Несмотря на то, что униформизационная лемма Семереди является идеальным инструментом для доказательства многих теорем, во многих других, как и в оценках для чисел Рамсея, она никак не помогает. Поэтому одна из основных задач в теории графов - найти более точные характеристические глобальные свойства графов.

С другой стороны, можно пытаться действовать без леммы Семереди. Существенные продвижения в любом из этих направлений окажут значительное влияние на теорию графов. (Это почти тавтология, так как мера прогресса это, в точности, наша возможность решать интересные задачи).

Обычно, тот, кто имеет опыт решения задачи в комбинаторике, видит, что трудности имеют свойство повторяться. Сложно выразить эти трудности в виде конкретной проблемы, поэтому обычно концентрируются на проблемах, в которых возникают типичные трудности такого рода. Таким образом, какой в итоге получится ответ, да или нет, менее важно, чем тот метод, которым он будет получен. Это объясняет, почему так много вопросов Эрдёша имеют скрытые глубины.

Что же с обвинениями в том, что комбинаторика - наука неглубокая? Одно из величайших удовольствий для математиков в том, что, стоя на плечах гигантов, как сказано, мы достигаем высот, и не снящихся предыдущим поколениям. Однако же, большинство работ по комбинаторике самодостаточны или требуют малого числа предварительных знаний для чтения. В противоположность этому, желающим заниматься, например, алгебраической теорией чисел могут потребоваться годы на то, чтобы достичь хотя бы уровня понимания формулировок.

Эти обвинения отражают разницу между *системными* и *конкретными математиками*. *Системные* предпочитают сказать, что теорема A глубока, потому что она использует теорему B, которая использует теорему C и т.д., и все они — значительные самостоятельные результаты. *Конкретный* математик может не использовать длинной цепочки конкретных результатов, как выше. С другой стороны, если мы рассмотрим более подходящую комбинаторике организацию результатов в виде мета-идей, картина изменится. Часто бывает, что нет формальной связи между двумя результатами, но нет возможности доказать один из них, если не известны идеи доказательства другого. Цепочки такого рода зависимостей могут быть очень длинными[19], так что текущие результаты в комбинаторике дают ценный вклад в методы будущих поколений. В общем, многие чувствуют, что

[19]Например, доказательство Грина-Тао существования сколь угодно длинных арифметических последовательностей простых чисел *Хорошо бы список формулировок различных концептуальных идей оттуда.....*

прогресс движется, комбинаторика развивается.

До сих пор моя аргументация была только внутри комбинаторики. Я показал, что область эта согласована и имеет смысловые направления, что не видно снаружи, но, тем не менее, важно. С другой стороны, я пока ничего не сказал, что ценного комбинаторика может дать математике в целом. Снова посмотрим, что сказал Атия по этому поводу([A3],§6):

„...предельное основание[20] для занятий математикой тесно связано с её единством. Если мы допускаем, что математика оправдывает себя посредством приложений, тогда появляется причина ей оставаться цельной. И если какая-то часть отходит от основного тела математики, то ей необходимо оправдывать своё существование самостоятельно."

Если мы согласимся с тем, что комбинаторика должна фундировать[21] себя таким образом, что можно тут сказать? Очевидное замечание состоит в том, что мы можем оправдывать комбинаторику напрямую, так как комбинаторика связаны с CS, прикладное значение которой очевидно. (Странно, но программный комитет на Международном математическом конгрессе в 1998 году отметил связи между различными областями математики, но не эту.) Как и связи с другими областями, имеются приложения комбинаторики к теории вероятностей, теории множеств, криптографии, теории коммуникаций, геометрии банаховых пространств, гармоническому анализу, теории чисел... список можно продолжить. Тем не менее, я знаю, как уже писал, что многие из этих приложений отнюдь не впечатляют дифференциальных геометров, например, тех, кто смотрит на эти приложения как на принадлежающие какой-то другой области математики и на что можно не обращать никакого внимания. Даже приложения к теории чисел считаются каким-то „вторым сортом" теории чисел.

Возможно, полезно обсудить различные способы, которыми одна область математики может оказывать пользу другой. Ниже приведён список возможных влияний области А на область Б .

(i) Теорема из А имеет немедленные и полезные следствия в Б.

(ii) Теорема из А имеет некоторые следствия в Б, но нужно поработать, чтобы доказать это.

(iii) Теорема из А похожа на вопросы в Б в достаточной степени, чтобы оказалось возможным адаптировать доказательство из А к вопросам области Б.

(iv) В попытках разрешить вопрос из А, разрабатываются методы в Б, которые представляют самостоятельный интерес.

(v) Область Б содержит определения, которые имеют схожие в области А (Пример: можно придумать определение независимости событий, которое похоже на определение независимости векторов.). Область А, таким образом представляет привлекательный путь организации результатов в Б.

(vi) Если кто-то приобретает опыт в области А, этот опыт оказывается полезным для того, чтобы сделать важный вклад в область Б.

(vii) Область А по духу достаточно близка к области Б, так что любой, кто хорош в одной области, скорее всего, хорош и в другой. Многие математики внесли свой вклад в обе области.

Менее прямые связи, такие как (iv) или (vii), конечно, не так заметны. Тем не менее, их вклад в междисциплинарные связи не следует недооценивать. Я чувствовал нечто подобное после нескольких лет работы в геометрии банаховых пространств. Исходные причины моего интереса здесь – теорема Дворецкого – и несколько очень естественных открытых красивых вопросов. Позднее я обнаружил, что выбранная мною ветвь математики сильно раскритиковалась за то, что оторвалась от своих классических корней в дифференциальных уравнениях, и, тем самым, потеряла свои цели. Я бы согласился, что там нет связей типа (i) и (ii), чистой теории банаховых пространств с другими областями, хотя есть некоторые глубокие идеи, которые многим кажутся не до конца понятыми. Тем не менее, как только кто-то начинает искать потерянные связи, он находит их в избытке. Использование концентрации меры предоставляет хороший пример (iii) (или (iv), классификация, конечно, немного искусственна и весьма условна). Что касается (vi) и (vii), то я говорю из собственного опыта, в недавнем прошлом работав над вопросами, чуждыми банаховых пространств. Хотя я и не применял теоремы про банаховы пространства, мой опыт в них помог мне относиться к вопросам так, как никто этого не делал

[20] В оригинале *... the ultimate justification for doing mathematics....* В русском языке (обычно в философском контексте) употребляется как „Они уже сами - метафизика культуры, её предельные основания", „Субстанция как предельное основание всего сущего", „Моей главной целью было дойти до предельных оснований, проследить цепь исторической причинности", „стремится выявить предельные основания жизни и деятельности", „Философия, в этом плане исследует предельные основания практической деятельности человека"....

[21] В оригинале статьи *justify*, т.е. 1. show or prove to be right or reasonable the person appointed has fully justified our confidence, be a good reason for the situation was grave enough to justify further investigation; 2. declare or make righteous in the sight of God (OxfordDictionary). Наиболее близким по смыслу переводом является *фундировать* : [нем. fundieren < лат. fundare - снабдить землей, заложить грунт для чего-л.] — обосновать, снабдить аргументами, доказательствами, заложить методологическую, теоретическую базу. (Словарь иностранных слов, 2006).

до меня. И я далеко не одинок в этом, многие, кто раньше работал над банаховыми пространствами, сейчас успешно работают в других областях, таких, как гармонический анализ, уравнения в частных производных, C^*-алгебрах, теории вероятностей и комбинаторике.

Единственный способ не обращать на это внимания, мне кажется, это считать, что все эти связи появились между одной неинтересной и бесполезной областью и другими. Это весьма радикальная точка зрения, игнорирующая много современной математики, включая результаты, которые имеют прямое практическое применение, так что сложно поверить, что кто-то действительно так считает. Итак, мне кажется, пора вернуться к обсуждению вопроса про две культуры в математике. Кажется, верно, что внутри каждой области имеется больше связей, чем между областями, вот почему эпитет „две культуры" мне кажется подходящим. (Я ещё раз повторюсь, что эти термины являются упрощениями, и что я прекрасно понимаю, что многих людей привлекают концептуальные теории потому, что они уже сильны в решении конкретных задач)

Если и правда можно разделить математику на две большие части, между которыми мало связей, то можно задаться вопросом, а что же это влечёт, и зачем об этом думать. Моё мнение таково. Одна причина в том, что эта ситуация имеет много нежелательных практических следствий. Например, математик из одной культуры может считать, что что может влиять на карьеру математика другой культуры[22]. Если будет несколько больше взаимопонимания между культурами, тогда карьерные решения будут более честными, а так этого даже при наилучших обстоятельствах довольно сложно добиться (я этом случае совершенно не обижен, моя карьера была как раз весьма удачна.). Второй эффект в том, что студенты, которые потенциально подходят для одной культуры, попадают под пресс другой культуры и могут пройти мимо своего призвания. Это в особенности верно для факультетов, где доминирует малое число направлений исследований.

Это эффекты, возможно, неизбежны в качестве побочного продукта академической жизни, и они не главная причина, по которой я настаиваю на взаимодействии вместо разделения. Наиболее важный момент в текущей коммуникативной проблеме - это то, что она полнится упущенными возможностями. Я слышал как системные математики жалуются на задачу, что она была атакована всеми известными техниками, но упрямое ядро остаётся комбинаторным. Это способ сказать, что проблема очень сложная, но сложная именно в той манере, что привлекательна для конкретных математиков. Аналогично, часто трудно достичь достойного уровня понимания, когда выделяется только комбинаторная природа вопроса. Вся ситуация будто бы сшита по шаблону межкультурного взаимодействия, но сотрудничество такого рода требует усилий со стороны конкретных математиков по изучению теорий, и терпения со стороны теоретиков к тем, кто не знают, что такое когомологии. Такие попытки, я думаю, не могут не обогатить обе культуры.

Список литературы

[A1] [A1] M. F. Atiyah, An interview with Michael Atiyah, Math. Intelligencer 6 (1984), 9-19.

[A2] M. F. Atiyah, How research is carried out, Bull. I.M.A. 10 (1974), 232-4.

[A3] M. F. Atiyah, Identifying progress in mathematics, ESF conference in Colmar, C.U.P. (1985), 24-41.

[CGW] F. Chung, R. L. Graham and R. M. Wilson, Quasi-random graphs, Combinatorica 9 (1990), 345-362.

[D] A. Dvoretzky, Some results on convex bodies and Banach spaces, Proc. Symp. on Linear Spaces, Jerusalem 1961, 123-160. [E] P. Erdös, Some remarks on the theory of graphs, Bull. A.M.S. 53, 292-4.

[E] P. Erdös, Some remarks on the theory of graphs, Bull. A.M.S. 53, 292-4.

[EL] P. Erdös and L. Lovász, Problems and results on 3-chromatic hypergraphs and some related questions, in A. Hajnal et al. eds, Infnite and fnite sets, North-Holland, Amsterdam, 609-628.

[J] S. Janson, Poisson approximation for large deviations, Random Structures and Algorithms 1, 221-230.

[K] B. S. Kashin, Sections of some fnite dimensional sets and classes of smooth functions, Isv. ANSSSR, ser. mat. 41 (1977), 334-351 (Russian).

[M] V. D. Milman, A new proof of the theorem of A. Dvoretzky on sections of convex bodies, Funct. Anal. Appl. 5 (1971), 28-37 (translated from Russian).

[Sza] S. J. Szarek, On Kashin's almost Euclidean orthogonal decomposition of 'n1 , Bull. Acad. Polon. Sci. 26 (1978), 691-694.

[Sze] E. Szemerédi, Regular partitions of graphs, in Proc. Colloque Inter. CNRS, J.-C. Bermond et al. eds, (1978), 399-401.

[22] Говорят, И.М.Гельфанд весьма критично отзывался о способностях Семереди, когда тот был его аспирантом.

[R] K. Roth, On certain sets of integers, J. London Math. Soc. 28 (1953), 245-252.

[T] A. Thomason, Pseudo-random graphs, in M. Karonski, ed., Proceedings of Random Graphs, Poznán 1985, Annals of Discrete Mathematics 33, 307-331.