Летнее задание

1. Докажите, что $\sin^3\alpha + \cos^3\alpha \leqslant 1$ для любого угла α.

2. Сумма квадратов вещественных чисел a, b, c и d равна 1. Докажите, что $(1-a)(1-b) \geqslant cd$.

3. Докажите, что для любых положительных чисел $x_1, \ldots, x_n$, $y_1, \ldots, y_n$ верно неравенство

а) $\dfrac{x_1^2}{y_1} + \dfrac{x_2^2}{y_2} + \ldots + \dfrac{x_n^2}{y_n} \geqslant \dfrac{(x_1+x_2+\ldots+x_n)^2}{y_1+y_2+\ldots+y_n}$; **б)** $\dfrac{x_1}{y_1} + \dfrac{x_2}{y_2} + \ldots + \dfrac{x_n}{y_n} \geqslant \dfrac{(x_1+x_2+\ldots+x_n)^2}{x_1y_1+x_2y_2+\ldots+x_ny_n}$.

4. Через **а)** середины сторон треугольника; **б)** точки касания вписанной окружности со сторонами треугольника проведены прямые, параллельные биссектрисам противоположных углов. Докажите, что они пересекаются в одной точке.

5. Сумма углов при основании трапеции равна 90°. Докажите, что отрезок, соединяющий середины оснований трапеции, равен отрезку, соединяющему середины диагоналей.

Определение. Выпуклый четырехугольник $ABCD$ называется *гармоническим*, если он вписан в окружность и $AB \cdot CD = AD \cdot BC$.

6. Дан вписанный четырехугольник $ABCD$. Прямые, касающиеся его описанной окружности в точках A и C, пересекаются в точке K. Докажите, что

а) если K лежит на прямой BD, то $ABCD$ — гармонический четырехугольник;

б) и обратно, если $ABCD$ — гармонический четырехугольник, то K лежит на прямой BD.

7. Имеется набор из 11 гирь. Известно, что при удалении любой гири оставшиеся можно разложить на две равные по весу группы по 5 гирь. Докажите, что все гири весят одинаково **а)** если все веса гирь — целые числа; **б)** без этого предположения.

8. Квадрат двумя способами разбит на n равновеликих частей. Докажите, что можно отметить в нем n точек так, что в каждой части будет ровно по одной точке.

9. (**Конечная проективная плоскость**) В конечном множестве M выбрано несколько подмножеств так, что любые два выбранных подмножества имеют ровно один общий элемент, и для любых двух элементов из M найдется выбранное подмножество, содержащее эти два элемента. При этом выбранных множеств хотя бы два, и в каждом из них не меньше трех элементов.

а) Придумайте пример такой системы подмножеств в множестве M, состоящем из 7 элементов.

б) Докажите, что во всех выбранных подмножествах поровну элементов.

в) Пусть в каждом из выбранных подмножеств n элементов. Докажите, что любой элемент множества M принадлежит ровно n из этих подмножеств.

г) Пусть в каждом из выбранных подмножеств n элементов. Найдите количество элементов M.

д) Докажите, что количество выбранных подмножеств равно количеству элементов M.

(Примечание: такое множество M называется *конечной проективной плоскостью*, его элементы называются *точками*, выбранные подмножества — *прямыми*.)

10. Пусть f — ненулевой многочлен с целыми коэффициентами. Будем называть его *содержанием* и обозначать через $c(f)$ наибольший общий делитель его коэффициентов. Докажите, что $c(fg) = c(f) \cdot c(g)$ для любых двух ненулевых многочленов f и g с целыми коэффициентами.

11. Дан многочлен $f(x) = nx^n - x^{n-1} - \ldots - x - 1$. Докажите, что все его **а)** вещественные; **б)** комплексные корни по модулю не превосходят 1.

12. (115) Клетки прямоугольника $m \times n$ раскрашены в черный и белый цвета. Разрешается перекрашивать в противоположный цвет клетки в любой строке или любом столбце. Сколько различных раскрасок можно получить такими действиями?

13. (211б) (**Теорема Кёнига**). На прямоугольной доске стоят несколько ладей. Докажите, что максимальное число не бьющих друг друга ладей, которое можно выбрать из этого набора, равно минимальному числу линий, которыми можно покрыть все ладьи.

14. (261б) По кругу стоят черные и белые точки (не меньше 12 штук), так что у каждой точки среди 10 его соседей (5 слева и 5 справа) поровну черных и белых. Докажите, что количество точек делится на 4.

15. (266) На математическом факультете учатся 40 юношей и 10 девушек. Каждая девушка дружит либо в точности со всеми теми юношами, кто старше её, либо в точности с теми, кто выше её. Докажите, что у каких-то двух юношей множества подруг совпадают.

16. (273б) Докажите, что среди любых 99 иррациональных чисел всегда есть 50 таких, сумма любых двух из которых иррациональна.

17. (284) $ABCD$ — выпуклый четырехугольник, $\angle A = 30^\circ$. Докажите, что $BC + CD + BD \geqslant AC$.

18. (290б) На плоскости отметили N красных точек. Потом пометили синим цветом середины всех отрезков с красными концами (можно отмечать синим цветом точку, уже помеченную красным). Какое наименьшее количество синих точек могло получиться?

19. (302) На плоскости дан сегмент, образованный дугой окружности и отрезком, соединяющим ее концы. В этот сегмент вписываются всевозможные пары окружностей, касающихся друг друга. Докажите, что геометрическое место точек касания таких пар окружностей — дуга некоторой окружности.

20. (304) Натуральное число N делится на число $111\ldots1$ (m единиц). Докажите, что сумма цифр числа N не меньше m.

21. (313б) Функция $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ определена так: $f(p/q)=1/q$, если p/q — несократимая дробь; $f(x)=0$, если $x\notin\mathbb{Q}$. Докажите, что f непрерывна во всех иррациональных точках и разрывна во всех рациональных точках.

22. (314) В стране некоторые пары городов соединены дорогами. Известно, что если закрыть любую дорогу, то по оставшимся можно будет добраться из любого города в любой другой. Докажите, что на дорогах можно ввести одностороннее движение так, чтобы можно было попасть из любого города в любой, двигаясь по дорогам в соответствии с правилами.

23. (315) На прямоугольной клетчатой доске стоят несколько ладей так, что на каждой вертикали и каждой горизонтали их четное число. Докажите, что их можно раскрасить в черный и белый цвет так, чтобы на каждой вертикали и каждой горизонтали черных и белых ладей было поровну.

24. (329) На клетчатой плоскости отмечено 100 клеток. Докажите, что среди них можно выбрать 25, среди которых нет соседних клеток (соседними считаются клетки, имеющие хотя бы одну общую точку).

Олимпиада первого дня лагеря

1. Даны положительные числа a и b такие, что $a+b\leqslant 2$. Докажите неравенство $\frac{a}{b+ab}+\frac{b}{a+ab}\geqslant 1$.

2. В городе на каждом перекрестке сходятся ровно три улицы. Улицы раскрашены в три цвета так, что на каждом перекрестке сходятся улицы трех разных цветов. Ровно три улицы ведут из этого города в другие города. Докажите, что они окрашены в разные цвета.

3. Можно ли разбить числа от 1 до 100 на три группы таким образом, чтобы в первой группе сумма чисел делилась на 102, во второй группе — на 203, а в третьей группе — на 304?

4. Дан остроугольный треугольник ABC такой, что $AB>BC$. На сторонах AB и BC взяты точки X и Y соответственно так, что $AX=BY$. Докажите, что $XY\geqslant\frac{AC}{2}$.

....

5. Натуральные числа n и m таковы, что $m^2+n^2+m \,\vdots\, mn$. Докажите, что m — квадрат натурального числа.

6. Докажите, что на плоскости можно отметить конечный набор точек так, что для каждой отмеченной точки найдутся хотя бы 100 отмеченных точек на расстоянии 1 от нее.

7. Точки M и N выбраны на сторонах AB и BC треугольника ABC таким образом, что точка пересечения отрезков AN и CM лежит на биссектрисе BL. Углы ALB и MNB равны. Докажите, что угол LNM — прямой.

Серия 1

1. (Ол-5) Натуральные числа n и m таковы, что $m^2+n^2+m \,\vdots\, mn$. Докажите, что m — квадрат натурального числа.

2. (Ол-6) Докажите, что на плоскости можно отметить конечный набор точек так, что для каждой отмеченной точки найдутся хотя бы 100 отмеченных точек на расстоянии 1 от нее.

3. (Ол-7) Точки M и N выбраны на сторонах AB и BC треугольника ABC таким образом, что точка пересечения отрезков AN и CM лежит на биссектрисе BL. Углы ALB и MNB равны. Докажите, что угол LNM — прямой.

4. Пусть $x,y,z>0$. Докажите или опровергните утверждение:
а) если $x+y+z\geqslant 3$, то $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\leqslant 3$; **б)** если $x+y+z\leqslant 3$, то $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\geqslant 3$.

5. Докажите, что для любых положительных чисел $a_1,a_2,\ldots,a_n$, $b_1,b_2,\ldots,b_n$

$$\min\frac{a_i}{b_i}\leqslant\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{b_1+b_2+\ldots+b_n}\leqslant\max\frac{a_i}{b_i}.$$

6. Сумма положительных чисел a_1, a_2, $\ldots$, a_n равна 1. Докажите, что $\sum\limits_{i<j}\frac{a_ia_j}{a_i+a_j}\leqslant\frac{n-1}{4}$.

Примечание: запись $\sum\limits_{i<j}$ обозначает суммирование по всем парам i,j, таким, что $i<j$.

7. Докажите, что многочлен $(x^2-13)(x^2-17)(x^2-221)$ имеет корни по любому наперед заданному простому модулю p.

8. Последовательность $x_1,x_2,\ldots$ задается следующим образом: x_1 — произвольное натуральное число, $x_{n+1}=x_n^2-x_n+1$ при всех натуральных n. Докажите, что члены этой последовательности попарно взаимно просты.

9. Во всех клетках таблицы 100×100 стоят плюсы. Разрешается одновременно изменить знаки во всех клетках одной строки или одного столбца. Можно ли, проделав такие операции несколько раз, получить таблицу, где ровно 1970 минусов?

Серия 2

Напоминание. Степень с рациональным показателем m/n, где $m \in \mathbb{Z}$ и $n \in \mathbb{N}$, определяется так: $a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}$ для $a > 0$. (Отрицательные числа в нецелые степени возводить нельзя.)

10. Докажите, что

а) определение степени корректно, то есть если $m/n = m_1/n_1$, то $a^{m/n} = a^{m_1/n_1}$;

б) $(a^x)^y = a^{xy}$ для любых $a > 0$ и $x, y \in \mathbb{Q}$; **в)** $a^x a^y = a^{x+y}$ для любых $a > 0$ и $x, y \in \mathbb{Q}$.

11. Пусть $a, b, c, d > 0$. Докажите, что

$$\frac{a}{b+c+d} + \frac{b}{a+c+d} + \frac{c}{a+b+d} + \frac{d}{a+b+c} \geqslant \frac{4}{3}.$$

12. Докажите, что для всех x из промежутка $0 < x < \pi/2$ и произвольного натурального n выполняется неравенство $\dfrac{\sin^{n+2} x}{\cos^n x} + \dfrac{\cos^{n+2} x}{\sin^n x} \geqslant 1$.

13. (**Лемма Гаусса**). Многочлен f с целыми коэффициентами раскладывается в произведение многочленов g и h, коэффициенты которых рациональны. Докажите, что f можно разложить в произведение многочленов g_1 и h_1 с целыми коэффициентами, причем так, что g_1 пропорционален g, а h_1 пропорционален h.

14. а) В треугольнике ABC провели симедиану из вершины B (напоминание: симедиана симметрична медиане BM относительно биссектрисы угла B). Продолжение этой симедианы пересекает описанную окружность треугольника в точке D. Докажите, что $ABCD$ — гармонический четырехугольник.

б) Пусть $ABCD$ — гармонический четырехугольник. Докажите, что диагональ BD содержит симедианы треугольников ABC и ADC, а диагональ AC содержит симедианы треугольников ABD и BCD.

15. У каждого четырехзначного числа нашли произведение его цифр. Чему равна сумма всех найденных 9000 произведений?

Серия 3

16. Докажите, что для любых положительных чисел a, b, c, d, e верно неравенство

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{d} + \frac{d}{e} + \frac{e}{a} \geqslant 5.$$

17. Пусть a, b, c — натуральные числа. Докажите, что $a^a b^b c^c \geqslant (\frac{a+b+c}{3})^{a+b+c}$.

18. Докажите, что $\frac{1}{2\sqrt{n}} \leqslant \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{7}{8} \cdot \ldots \cdot \frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{2n}}$.

19. На координатной плоскости дан треугольник ABC, у которого векторы сторон $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ имеют координаты (a, b) и (c, d). Докажите, что площадь этого треугольника равна половине модуля определителя матрицы $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$.

20. Пусть p — простое число. Будем называть остаток $x \in \mathbb{Z}_p$ *кубическим корнем* из остатка $a \in \mathbb{Z}_p$, если $x^3 \equiv a \pmod{p}$. Докажите, что

а) если $p = 3k + 2$ (где $k \in \mathbb{Z}$), то существует единственный кубический корень из 1;

б) если $p = 3k + 2$, то для любого $a \in \mathbb{Z}_p$ существует единственный кубический корень из a;

в) если $p = 3k + 1$, то существуют три кубических корня из 1;

г) если $p = 3k + 1$, то у любого ненулевого остатка либо ровно три кубических корня, либо ни одного.

21. В полном 239-вершинном графе ребра покрашены в несколько цветов, причем в любом треугольнике есть хотя бы два ребра одного цвета. Какое наибольшее количество цветов может быть в такой раскраске?

22. Клетки квадрата 100×100 покрашены в красный и синий цвета. При этом в каждой строчке и в каждом столбце красных и синих клеток поровну. Докажите, что количество способов положить доминошку на две красные клетки равно количеству способов положить ее на две синие клетки.

Серия 4

Определение. Пусть на плоскости дана окружность радиуса R с центром O и точка $A \neq O$. Пусть A' — точка на луче OA, для которой $OA' = \frac{R^2}{OA}$ (то есть, A' — образ A при инверсии). Проведем через A' прямую ℓ, перпендикулярную OA. Эта прямая ℓ называется *полярой* точки A, а точка A — *полюсом* прямой ℓ относительно данной окружности.

В следующих трех задачах все полюса и поляры рассматриваются относительно некоторой фиксированной окружности.

23. (**Принцип двойственности**). Пусть A и B — две точки плоскости, прямые a и b — их поляры. Докажите, что $A \in b$ тогда и только тогда, когда $B \in a$.

24. Докажите, что **а)** если поляры точек A и B пересекаются в точке C, то C — полюс прямой AB;

б) три точки (отличные от центра окружности) лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда их поляры проходят через одну точку или параллельны.

25. Даны положительные числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Докажите, что

$$\frac{a_1^2}{a_2} + \frac{a_2^2}{a_3} + \ldots + \frac{a_{n-1}^2}{a_n} + \frac{a_n^2}{a_1} \geqslant a_1 + a_2 + \ldots + a_n.$$

26. Докажите, что при $a, b, c, d > 0$ выполняется неравенство

$$\frac{a}{b+2c+3d} + \frac{b}{c+2d+3a} + \frac{c}{d+2a+3b} + \frac{d}{a+2b+3c} \geqslant \frac{2}{3}.$$

27. $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n \in [0,1]$. Докажите, что $x_1 + x_2 + \ldots + x_n - x_1x_2 - x_2x_3 - \ldots - x_{n-1}x_n \leqslant \left[\frac{n+1}{2}\right]$.

28. Существует ли набор из 2013 последовательных натуральных чисел, сумма которых есть куб натурального числа?

29. Докажите, что кольцо $\mathbb{Z}[x]$ факториально.

Серия 5

30. Докажите, что натуральное число n представимо в виде суммы двух квадратов целых чисел тогда и только тогда, когда любое простое число вида $4k+3$ входит в его разложение в четной степени.

31. Последовательность $x_1, x_2, \ldots$ задана следующим образом: $x_1 = x_2 = 1$, $x_{n+1} = x_{n-1}^3 + x_n^3$ при $n \geqslant 2$. Докажите, что в этой последовательности есть число, делящееся на 239.

32. Точка A лежит вне окружности. Через нее проведены касательные AB и AC (B и C — точки касания). Докажите, что прямая BC — поляра точки A.

33. Пусть $f(x)$ — многочлен с целыми коэффициентами, $\frac{p}{q}$ — несократимая дробь, $f(\frac{p}{q}) = 0$. Докажите, что $f(x) = (qx-p)g(x)$, где $g(x)$ — многочлен с целыми коэффициентами.

34. Докажите, что для чисел $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n \in [0,1]$ имеет место неравенство

$$\sqrt{x_1^2 + (1-x_2)^2} + \sqrt{x_2^2 + (1-x_3)^2} + \ldots + \sqrt{x_n^2 + (1-x_1)^2} \geqslant n/\sqrt{2}.$$

35. Действительные числа $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_k$ удовлетворяют условию $x_1 + x_2 + \ldots + x_k = 0$. Обозначим через m наименьшее, а через M — наибольшее из этих чисел. Докажите, что

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_k^2 \leqslant -kmM.$$

36. В таблице $n \times n$ расставлены иероглифы. Известно, что после вычеркивании любого столбца найдутся две одинаковые строки. Докажите, что в ней изначально есть две одинаковые строки.

37. Имеется куча из 1000 камней. Два игрока ходят по очереди. За один ход можно взять 1, 2, 4, 8,... (любую степень двойки) камней. Выигрывает взявший последний камень. Кто выиграет при правильной игре?

38. Докажите, что на клетчатой бумаге невозможно нарисовать правильный треугольник с вершинами в узлах.

Серия 6

39. Дана окружность и точка A внутри нее. Через A проводятся всевозможные хорды XY, и для каждой такой хорды строится точка пересечения касательных к окружности в точках X и Y. Докажите, что все такие точки лежат на одной прямой.

40. Рассмотрим множество чисел вида $x + y\sqrt{2}$, где $x, y \in \mathbb{Z}$. Оно обозначается $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$.

а) Докажите, что $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ — целостное кольцо.

б) Для элемента $a = x + y\sqrt{2}$, где $x, y \in \mathbb{Z}$ определим $N(a) = x^2 - 2y^2$. Докажите, что $N(ab) = N(a)N(b)$ для любых $a, b \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$.

в) Докажите, что элемент $a \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ обратим тогда и только тогда, когда $N(a) = \pm 1$.

г) Найдите в $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ три обратимых элемента.

д) Докажите, что в $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ бесконечно много обратимых элементов.

е) Докажите, что уравнение $x^2 - 2y^2 = 1$ имеет бесконечно много решений в целых числах.

41. На окружности длины 1 отмечены 10 точек. На другой окружности длины 1 закрашены несколько дуг суммарной длины меньше $1/10$. Докажите, что можно наложить одну окружность на другую так, что ни одна отмеченная точка не попадет на закрашенную дугу.

42. В матрице 10×10 стоят **а)** 100 единиц; **б)** числа от 1 до 100 в естественном порядке: в первой строке — числа от 1 до 10 слева направо, во второй — числа от 11 до 20 слева направо, и так далее. Найдите определитель этой матрицы.

43. Для любого ли многочлена $P(x)$ четвертой степени существуют такие многочлены $Q(x)$ и $R(x)$ второй степени, что $P(x) = Q(R(x))$?

44. Докажите, что **а)** $\sin x < x < \operatorname{tg} x$ для любого $x \in (0, \pi/2)$; **б)** $\frac{\sin x}{x} \to 1$ при $x \to 0$.

45. Пусть $f(x) = 1/x$. Найдите **а)** $f'(3)$; **б)** $f'(x)$.

Серия 7

46. а) Найдите производную функции $\frac{x^2+x+1}{x^2+1}$.

б) Пусть $f(x) = (x+5)^n$, где $n \in \mathbb{N}$. Докажите, что $f'(x) = n(x+5)^{n-1}$.

47. Докажите, что **а)** $(\sin x)' = \cos x$; **б)** $(\cos x)' = -\sin x$; **в)** $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = \operatorname{tg}^2 x + 1$; **г)** $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg}^2 x - 1$.

48. а) Положительные числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ таковы, что $a_1 a_2 \ldots a_n = 1$. Докажите, что

$$(1+a_1)(1+a_2)\ldots(1+a_n) \geqslant 2^n.$$

б) Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n > 0$. Докажите, что

$$(1+a_1)(1+a_2)\ldots(1+a_n) \geqslant \left(1+\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}\right)^n$$

49. Вписанная окружность треугольника ABC касается сторон BC, AC и AB в точках A_1, B_1 и C_1 соответственно. Прямая, касающаяся вписанной окружности в середине дуги B_1C_1 (не содержащей точку A_1), пересекает прямую BC в точке A_2. Точки B_2 и C_2 определяются аналогично. Докажите, что точки A_2, B_2 и C_2 лежат на одной прямой.

50. При инверсии относительно окружности S точка A переходит в точку B. Докажите, что S — окружность Аполлония точек A и B. (Напоминание: окружность Аполлония — геометрическое место точек X, таких, что отношение $AX : BX$ равно некоторому фиксированному числу.)

51. В Швамбрании 2013 городов, некоторые пары городов соединены дорогами, причем из каждого города выходит не более 13 дорог и из любого города можно доехать до любого другого. Докажите, что Швамбранию можно разделить на 13 независимых республик так, чтобы никакие два города из одной республики не были соединены дорогами.

52. Все натуральные числа раскрашены в розовый и голубой цвета так, что чисел каждого цвета бесконечно много. Докажите, что существует число, являющееся и суммой двух розовых, и суммой двух голубых.

Серия 8

53. Найдите производную функции **а)** $f(x) = \sin(3x)$; **б)** $f(x) = \cos(1-x)$; **в)** $f(x) = (x^2+1)^n$.

54. Найдите производную функции $f(x) = \sqrt[n]{x}$.

55. Пусть $f(x)$ — многочлен, a — его корень. Докажите, что

а) если a — кратный корень, то $f'(a) = 0$; **б)** если $f'(a) = 0$, то a — кратный корень.

56. По трем прямолинейным дорогам с постоянными скоростями идут три пешехода. В начальный момент времени они не находились на одной прямой. Докажите, что они могут оказаться на одной прямой не более двух раз.

57. Дан равнобедренный треугольник ABC ($AB = BC$) и окружность, которая касается прямых AB и BC в точках A и C. Точка M — середина отрезка AC, точка L — середина дуги AC, лежащей внутри треугольника. Докажите, что для любой точки K на окружности выполняется равенство $\angle MKL = \angle BKL$.

58. Даны положительные числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$, сумма которых равна 1. Докажите неравенство $x_1x_2 + x_2x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n + x_nx_1 \leqslant \frac{1}{4}$ **а)** для $n = 4$; **б)** для четного $n > 2$; **в)** для нечетного $n > 3$.

59. $P(x,y)$ – многочлен двух переменных такой, что $P(x,x) = 0$ для любого $x \in \mathbb{R}$. Докажите, что $P(x,y)$ делится на $x - y$.

60. На координатной плоскости дан многоугольник P площади больше 1. Докажите, что существует многоугольник, получающийся из P параллельным переносом на вектор с целыми координатами и имеющий общую точку с P.

Серия 9

61. Найдите минимальное и максимальное значение выражения $x^3 - x^2 - x$ при $x \in [0,2]$.

62. Даны натуральные числа m и n. Найдите минимум выражения $x^n + \frac{1}{x^m}$ при $x > 0$.

63. Пусть $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — дифференцируемая функция. Докажите, что если f — четная функция, то f' — нечетная функция. (Напоминание: функция f называется четной, если $f(-x) = f(x)$ для всех x, и нечетной, если $f(-x) = -f(x)$ для всех x.)

64. $a, b, c, d > 0$, $a + b + c + d = 1$. Докажите, что $\sqrt{4a+1} + \sqrt{4b+1} + \sqrt{4c+1} + \sqrt{4d+1} < 6$.

65. Докажите, что $x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2} \leqslant 1$ для любых $x, y \in [0,1]$.

66. а) Пусть $f(x,y)$ и $g(x,y)$ — многочлены от двух переменных, такие, что $f(x,y) = g(x,y)$ для любых $x, y \in \mathbb{R}$. Докажите, что соответствующие коэффициенты этих многочленов совпадают.

б) $f(x_1, \ldots, x_n)$ и $g(x_1, \ldots, x_n)$ — многочлены от n переменных, такие, что их значения при подстановке любых чисел $x_1, \ldots, x_n$ равны. Докажите, что коэффициенты этих многочленов совпадают.

67. На доске написано число 2. Двое игроков по очереди прибавляют к написанному числу некоторый его делитель, не равный самому числу. Проигрывает тот, кто первым напишет число **а)** большее 2013; **б)** большее 2014. Кто выигрывает при правильной игре?

68. У весов три чашки, и при взвешивании опускается та чашка, на которой расположен средний по весу предмет из взвешиваемых трех. Дано 25 предметов, причем все они — разного веса. Как определить средний из них по весу? (При взвешивании на чашки нужно класть по одному предмету).

Серия 10

69. Докажите, что $\log_a b \cdot \log_b c = \log_a c$ для любых положительных чисел $a, b, c \neq 1$.

70. Докажите, что для любого натурального $n > 1$ верно равенство:

$$[\sqrt[2]{n}] + [\sqrt[3]{n}] + [\sqrt[4]{n}] + \ldots + [\sqrt[n]{n}] = [\log_2 n] + [\log_3 n] + [\log_4 n] + \ldots + [\log_n n].$$

71. Докажите, что **а)** $\cos x \geqslant 1 - \frac{x^2}{2}$ при всех $x \in \mathbb{R}$; **б)** $\sin x \geqslant x - \frac{x^3}{6}$ при всех $x \geqslant 0$.

72. Сколько решений в целых числах имеет уравнение $x^2 + y^2 = n$ для данного n, если **а)** n — степень двойки; **б)** n — простое число вида $4k+1$; **в)** $n = p^3$, где p — простое число вида $4k+1$; **г)** $n = pq$, где p и q — простые числа вида $4k+1$.

73. Две окружности пересекаются в точках A и B. Хорды AM и AN касаются этих окружностей в точке A. Точка C такова, что $MANC$ — параллелограмм. Точки P и Q — середины отрезков BN и MC. Докажите, что $\angle APQ = \angle ANC$.

74. Циркулем и линейкой постройте окружность, **а)** проходящую через две данные точки и касающуюся данной прямой; **б)** проходящую через две данные точки и касающуюся данной окружности.

75. **а)** Три кузнечика на плоскости играют в чехарду: каждым ходом один из кузнечиков перепрыгивает в точку, симметричную его нынешнему положению относительно другого кузнечика. Могут ли кузнечики, сидящие в точках (0;0), (0;1), (1;0), после нескольких прыжков оказаться в точках (0;0), (0;3), (3;0)?

б) Могут ли 4 кузнечика, сидящие в точках (0;0), (0;1), (1;0), (1;1), после нескольких прыжков по таким правилам оказаться в точках (0;0), (1;1), (3;0), (2;−1)?

76. В компанию из n человек пришел журналист. Ему известно, что в этой компании есть человек, который знает всех, но которого не знает никто. Журналист может задавать вопросы вида “знаете ли Вы такого-то” любому человеку. При этом, одному человеку можно задавать несколько вопросов, и все ответы правдивы. **а)** Можно ли за $n-1$ вопрос узнать, кто этот человек? **б)** За какое наименьшее число вопросов это можно узнать?

Серия 11

77. (**Неравенство Бернулли**). Пусть $x > -1$. Докажите, что

а) $(1+x)^\alpha \geqslant 1 + \alpha x$ для любого вещественного $\alpha > 1$;

б) $(1+x)^\alpha \leqslant 1 + \alpha x$ для любого вещественного $\alpha \in (0,1)$;

в) $(1+x)^\alpha \geqslant 1 + \alpha x$ для любого вещественного $\alpha < 0$.

78. Найдите производную функции $f(x) = x^x$.

79. **а)** Каждое из натуральных чисел a и b представляется в виде $x^2 + 2y^2$, где x и y — целые числа. Докажите, что и число ab тоже представимо в таком же виде.

б) Целое число a таково, что число $3a$ представляется в виде $x^2 + 2y^2$, где x и y — целые числа. Докажите, что и число a представимо в таком же виде.

80. Дан многочлен $f(x,y)$. Известно, что для любых $x, y \in \mathbb{R}$ таких, что $x^2 + y^2 = 1$, выполняется равенство $f(x,y) = 0$. Докажите, что $f(x,y) = (x^2 + y^2 - 1)g(x,y)$, где $g(x,y)$ — многочлен.

81. Для каждой вершины выпуклого четырехугольника нашли сумму расстояний до двух сторон, примыкающих к противоположной вершине (под расстоянием до стороны понимается расстояние до содержащей ее прямой). Оказалось, что три из четырех полученных суммы равны. Докажите, что **а)** все четыре суммы равны; **б)** четырехугольник — параллелограмм.

82. На клетчатой плоскости дана фигура из конечного числа клеток. Для любого натурального n верно, что копиями этой фигуры можно покрыть без наложений некоторую область, содержащую квадрат $n \times n$. Докажите, что копиями этой фигуры можно замостить всю плоскость.

83. Можно ли разбить натуральные числа на 6 групп так, чтобы для любого натурального n числа n, $2n$, …, $6n$ были в разных группах?

84. (Л14) По кругу стоят черные и белые точки (не меньше 12 штук), так что у каждой точки среди 10 его соседей (5 слева и 5 справа) поровну черных и белых. Докажите, что количество точек делится на 4.

Серия 12

85. (**Неравенство о средних степенном и среднем арифметическом**). Пусть $x, y \geqslant 0$, $\alpha > 1$. Докажите, что

а) если $x + y = 2$, то $x^\alpha + y^\alpha \geqslant 2$;

б) $\left(\frac{x^\alpha + y^\alpha}{2}\right)^{1/\alpha} \geqslant \frac{x+y}{2}$.

в) $\left(\frac{x_1^\alpha + x_2^\alpha + \ldots + x_k^\alpha}{k}\right)^{1/\alpha} \geqslant \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_k}{k}$ для любых $x_1, x_2, \ldots, x_k \geqslant 0$.

г) Докажите, что равенство в предыдущем пункте достигается только при $x_1 = x_2 = \ldots = x_k$.

86. Многочлен $f(x,y)$ двух переменных называется *симметрическим*, если $f(x,y) = f(y,x)$ для всех $x, y \in \mathbb{R}$. Докажите, что любой симметрический многочлен $f(x,y)$ можно выразить как многочлен от переменных $s = x + y$ и $p = xy$. (Например, $x^2 + y^2 = s^2 - 2p$.)

87. $P(x)$ — многочлен с целыми коэффициентами. Докажите, что **а)** для любого целого n $P(P(n)) - n$ делится на $P(n) - n$; **б)** многочлен $P(P(x)) - x$ делится на многочлен $P(x) - x$.

88. Две окружности касаются внешним образом в точке A. К ним проведены две параллельные касательные, касающиеся их в точках B и C соответственно, такие, что точка A не лежит между ними. Докажите, что угол BAC — прямой.

89. Вася задумал 10 вещественных чисел, а Петя пытается их угадать. Он может спрашивать, чему равна сумма любого набора, состоящего из одного или нескольких задуманных чисел (например, второго, пятого и восьмого числа). За какое наименьшее число вопросов он может наверняка узнать все числа?

90. На плоскости дана ломаная длины 1. Докажите, что **а)** ее можно покрыть кругом радиуса $1/2$; **б)** если она замкнутая, то ее можно покрыть кругом радиуса $1/4$.

91. (Л18) На плоскости отметили N красных точек. Потом пометили синим цветом середины всех отрезков с красными концами (можно отмечать синим цветом точку, уже помеченную красным). Какое наименьшее количество синих точек могло получиться?

Серия 13

92. (**Неравенство о средних степенных**). **а)** Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_k > 0$. Для каждого вещественного $\alpha \neq 0$ обозначим через S_α среднее степенное порядка α чисел $\{x_i\}$, то есть $S_\alpha = \left(\frac{x_1^\alpha + x_2^\alpha + \ldots + x_k^\alpha}{k}\right)^{1/\alpha}$. Докажите, что $S_\alpha \leqslant S_\beta$ при $\alpha < \beta$, причем равенство в достигается тогда и только тогда, когда $x_1 = x_2 = \ldots = x_k$.

б) Докажите, что если $\alpha < 0 < \beta$, то $S_\alpha \leqslant \sqrt[k]{x_1 x_2 \ldots x_k} \leqslant S_\beta$, причем равенство в достигается тогда и только тогда, когда $x_1 = x_2 = \ldots = x_k$.

93. Пусть $a, b, c > 0$. Докажите неравенство **а)** $\frac{ab}{a+b} + \frac{bc}{b+c} + \frac{ca}{c+a} \leqslant \frac{a+b+c}{2}$;
б) $\frac{ab}{a+3b} + \frac{bc}{b+3c} + \frac{ca}{c+3a} \leqslant \frac{a+b+c}{4}$.

94. Даны натуральное число k и многочлены $R(x)$ и $S(x)$ с целыми коэффициентами. Известно, что при любом целом x число $R(S(x)) - x$ делится на k. Докажите, что число $S(R(x)) - x$ тоже делится на k при любом целом x.

95. Клетки шахматной доски пронумерованы числами от 1 до 64 по порядку (первая строчка от 1 до 8, вторая — от 9 до 16 и так далее). Докажите, что сумма чисел под 8 не бьющими друг друга ладьями не зависит от способа их расстановки.

96. В выпуклом шестиугольнике все углы равны. Докажите, что три разности его противоположных сторон равны между собой.

97. (Л16) Докажите, что среди любых 99 иррациональных чисел всегда есть 50 таких, сумма любых двух из которых иррациональна.

Серия 14

98. Дано $a \in \mathbb{R}$. Докажите, что $\left(1 + \frac{a}{x}\right)^x \to e^a$ при $x \to +\infty$.

99. Для положительных чисел x, y, z выполняется равенство $x^2 + y^2 + z^2 = 3$. Докажите неравенство $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geqslant x + y + z$.

100. Найдите множество возможных значений суммы $S = \frac{a}{a+b+d} + \frac{b}{a+b+c} + \frac{c}{b+c+d} + \frac{d}{a+c+d}$, где a, b, c, d — произвольные положительные числа.

101. a, b, c — положительные числа. Для любого $n \in \mathbb{N}$ числа a^n, b^n и c^n являются сторонами треугольника. Докажите, что все эти треугольники равнобедренные.

102. Докажите, что многочлен $x^{200} \cdot y^{200} + 1$ нельзя представить в виде $f(x) \cdot g(y)$, где f и g — **а)** многочлены от одной переменной; **б)** функции из $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$.

103. Докажите, что если для вписанного четырехугольника $ABCD$ выполнено равенство $CD = AD + BC$, то биссектрисы его углов A и B пересекаются на стороне CD.

104. На столе лежат 35 кучек орехов. Разрешается добавлять по одному ореху одновременно к любым 23 кучкам. Докажите, что повторяя эту операцию, можно уравнять все кучки.

105. (Л13) (**Теорема Кёнига**). На прямоугольной доске стоят несколько ладей. Докажите, что максимальное число не бьющих друг друга ладей, которое можно выбрать из этого набора, равно минимальному числу линий, (вертикалей и горизонталей), которыми можно покрыть все ладьи.

Серия 15

106. Докажите, что любой симметрический многочлен от n переменных $x_1, \ldots, x_n$ можно представить в виде многочлена от $s_1, s_2, \ldots, s_n$, где $s_k = x_1^k + x_2^k + \ldots + x_n^k$.

107. Дано натуральное n. Найдите сумму **а)** $C_n^0 - C_n^2 + C_n^4 - C_n^6 + \ldots$; **б)** $C_n^0 + C_n^4 + C_n^8 + \ldots$.

108. f и g — **а)** квадратные трехчлены; **б)** непрерывные функции из $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$. Известно, что функции $f + g$ и $f - g$ не имеют корней. Докажите, что хотя бы одна из функций f и g тоже не имеет корней.

109. Можно ли покрыть правильный треугольник двумя меньшими правильными треугольниками?